

اولي ثانوي نظري منہج

جبر . مثلثات . هندسہ تحلیلیہ
ترم ثان



01005156735

المصفوفات

هي عملية تنظيم للبيانات او المعلومات في صورة
مصفوف $m \times n$ واعمدة n

١ المصفوفة

تكتب $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$

صف $m > n$ صف $m < n$

القطر الرئيسي فيه $m = n$

٢ نظم المصفوفة

كل عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز $\mathbf{0}$

$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

٣ المصفوفة المصفوفة

هي مصفوفة مربعة كل عناصرها أصفار
ويرمز لها بالرمز \mathbf{I}

$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$

٤ المصفوفة القطرية

هي مصفوفة مربعة كل عناصرها أصفار
علاوة على عناصر القطر الرئيسي \mathbf{I}

$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

٥ مدور المصفوفة

اذا كانت $m \times n$ مصفوفة على $n \times m$ نظام
فإنه $m \times m$ مصفوفة على $m \times m$ نظام
لمرتبة m كل صف عمود

المصفوفة الشبه متماثلة

٨

هي مصفوفة مربعية عناصرها
الرئيسية صفها والعناصر حول
القطر الرئيسية مقبوضات جميعه

$$P = P - P$$

مشرط

$$P = P + P$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_1$$

$$P_2 = P_2$$

$$P_3 = P_3$$

المصفوفة المتماثلة

٧

هي مصفوفة مربعية عناصرها
موزعة بطريقة رئيسية متساوية

$$P = P$$

مشرط

$$P = P - P$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_1$$

$$P_2 = P_2$$

$$P_3 = P_3$$

ضرب مصفوتين

عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

الشروط

$$P = P \times P$$

النتائج

نضرب عناصر الصف الأول في عناصر كل عمود
ونجمه ونكتب النتائج كصف أول

طريقة الضرب

ونضرب عناصر الصف الثاني في عناصر كل عمود
ونجمه ونكتب النتائج كصف ثاني وهكذا

$$P = P \times P$$

أكمل

$$P = P \times P$$

$$P = P \times P$$

$$P = P \times P$$

قواعد ہا ا ا ا ا ا مہ

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

$$\text{اذا کا } \sim p = p \text{ (ا ج) } \sim p = \sim p \text{ (ا ج) } = \sim p$$

المحددات

أولاً: محدد الرتبة الثانية

$$\begin{vmatrix} u & p \\ s & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & p \\ s & z \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta = 1 \times 4 - 2 \times 2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

ثانياً: محدد الرتبة الثالثة

$$\begin{vmatrix} u & p \\ s & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & p \\ s & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u & p \\ s & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ u & p \\ s & z \end{vmatrix} = \Delta$$

يمكنك ذلك بالحدود عند طريقه أي عمود (أو صف)

ملاحظة

مع مراعاة الإشارات كالتالي

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ملاحظة هاهنا

إذا كانت P مصفوفة مربعة على النظام 3×3

$$P^T = P \quad |P^T| = |P|$$

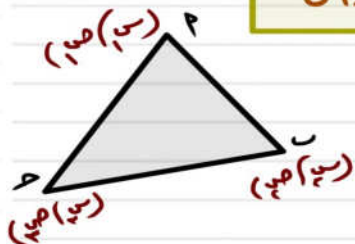
١

إذا كانت P مصفوفة مربعة على النظام 3×3 وكان $|P| = 0$

$$P^T = P \quad |P^T| = |P|$$

٢

إيجاد مساحة المثلث بالمحددات



ساحة المثلث =

$$\frac{1}{2} |\Delta| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & س & ص \\ 1 & س & هـ \\ 1 & س & ح \end{vmatrix}$$

إذا كانت قيمه (المحدد) صفر \therefore $س, هـ, ح$ تقع على استقامة واحدة.

ملاحظة

حل نظام المعادلات الخطية بالمحددات [طريقه كرامر]

لنبدأ بحل المعادلات الخطية $س + ص = ح$ ، $س + هـ = و$ نتبع الخطوات :

$$\begin{vmatrix} 1 & س \\ 1 & هـ \end{vmatrix} = \Delta, \quad \begin{vmatrix} 1 & ح \\ 1 & و \end{vmatrix} = \Delta_s, \quad \begin{vmatrix} 1 & و \\ 1 & ح \end{vmatrix} = \Delta_v$$

$$\text{مجموعه الحل} = \left\{ \left(\frac{\Delta_s}{\Delta}, \frac{\Delta_v}{\Delta} \right) \right\}$$

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفه

حل المعادلات $س + ص = ح$ ، $س + هـ = و$ نتبع الخطوات :

حيث

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} ح \\ و \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & س \\ 1 & هـ \end{pmatrix} = M, \quad \begin{pmatrix} 1 & ح \\ 1 & و \end{pmatrix} = C$$

المباين المعاملات المتوابع

مجموعه الحل = $\{ (س, ص) \}$

المتجهات

الهندسة التحليلية

- ١ كمية متجهة : تتحدد بمقدار ونقطة (المحور - البرزخ - الزنبر)
٢ كمية متجهة : تتحدد بمقدار واتجاه (البرزخ - الزنبر - البتة)

الكميات

القطعة المستقيمة الموجهة



تتحدد بثلاث عناصر:

- ١ نقطة بداية ٢ نقطة نهاية ٣ الاتجاه من البداية إلى النهاية

$$\vec{AB} = \vec{BA} \quad \vec{AB} \neq \vec{BA}$$

ملاحظات

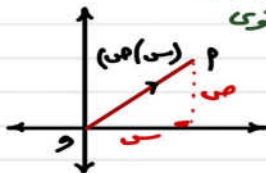
$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{AC} \\ \vec{AB} - \vec{AC} &= \vec{CB} \\ \vec{AB} + \vec{BA} &= \vec{0} \end{aligned}$$

نقال لقطعتيه متطبعيه متطبعيه مرجعية : مرزا متجانسان
اذا كانا ١ لهما نفس المكون ٢ لهما نفس الاتجاه

التكافؤ

متجه الموضع

موقعه بداية نقطة المكون و
نقطته اى نقطة في المستوى



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{r} = (x, y) \\ \vec{OP} &= \vec{r} = (5, 6) \\ \vec{OP} &= \vec{r} = (0, -2) \\ \vec{OP} &= \vec{r} = (-2, 0) \end{aligned}$$

نقطة ١ ...

معيار المتجه

معنى طول المتجه
ان كان $\vec{r} = (x, y)$

$$\text{معياره} : \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ وحدة طول}$$

$$\vec{r} = (-2, 6) \text{ يكون طول } \|\vec{r}\| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \text{ وحدة}$$

متجه الوحدة

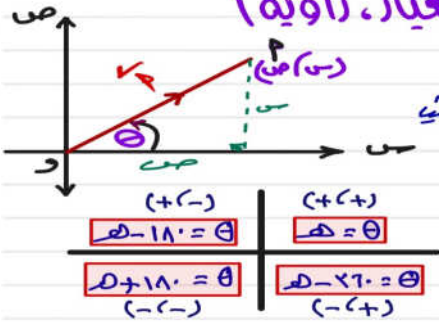
هو المتجه الذي معياره يساوي واحد
 $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), \dots$

التعبير عن المتجه بدلالة متجهي الوحدة الاساسيين

$$\vec{r} = (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \text{ حيث } \vec{e}_1 = (1, 0) \text{ و } \vec{e}_2 = (0, 1)$$

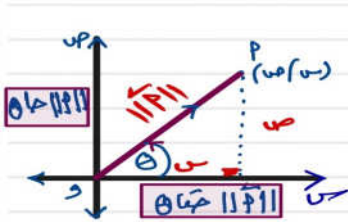
$$\vec{r} = (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

الصورة القطبية للمتجه (معيار، زاوية)



إذا كان $\vec{P} = (s, \theta)$ صورة إحصائية
تكتبه كخط: صورة قطبية $\vec{P} = (معيار, زاوية)$ حيث

المعيار \vec{P}	الزاوية θ
$\sqrt{s^2 + 0^2} = s$	$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
$\sqrt{s^2 + 0^2} = s$	مع سماع ربع لثانية



الصورة الإحداثية (s, θ)

إذا كان $\vec{P} = (s, \theta)$ صورة قطبية
تكتبه كصورة إحصائية
 $(s, \theta) = (||\vec{P}||, \theta)$

جمع المتجهات جبرياً

إذا كان $\vec{P} = (s, \theta)$ ، $\vec{Q} = (t, \phi)$
فإن: $\vec{P} + \vec{Q} = (s + t, \theta + \phi)$
 $(s + t, \theta + \phi) = (s, \theta) + (t, \phi)$



ضرب عدد حقيقي λ في $\vec{P} = (s, \theta)$
 $(\lambda s, \lambda \theta) = \lambda (s, \theta)$



$\vec{P} = (s, \theta)$ ، $\vec{Q} = (t, \phi)$ ، $\vec{R} = (u, \psi)$
فإن: $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = (s + t + u, \theta + \phi + \psi)$

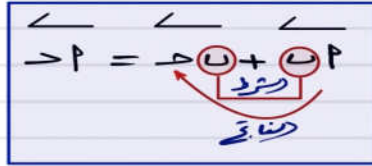
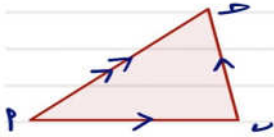
شروط توازي وتعامد متجهين

إذا كان $\vec{P} = (s, \theta)$ ، $\vec{Q} = (t, \phi)$

١ $\vec{P} \parallel \vec{Q}$ إذا كان $\frac{s}{t} = \frac{\theta}{\phi}$ أي $\frac{s}{t} = \frac{\theta}{\phi}$ أو $\frac{s}{t} = \frac{\theta}{\phi}$

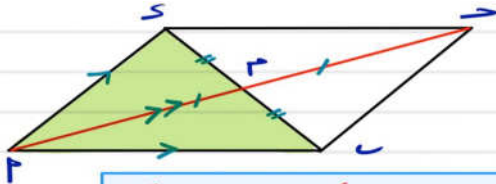
٢ $\vec{P} \perp \vec{Q}$ إذا كان $\frac{s}{t} = -\frac{\theta}{\phi}$ أي $\frac{s}{t} = -\frac{\theta}{\phi}$ أو $\frac{s}{t} = -\frac{\theta}{\phi}$

جمع المتجهات هندسياً



قاعدة شال

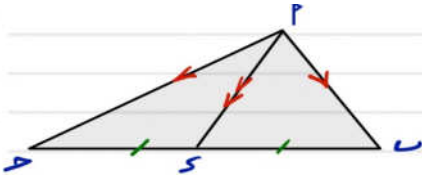
١



قاعدة متوازي الأضلاع

٢

$$\vec{PQR} = \vec{PQR} = \vec{PQ} = \vec{PS} + \vec{SR}$$



قاعدة متوسط المثلث

٣

∴ \vec{SR} متوسط في $\triangle PQR$

$$\vec{PSR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$$

طرح المتجهات هندسياً



من قاعدة المجموع

$$\vec{PQ} = \vec{PQ} + \vec{QR}$$

$$\vec{PQ} - \vec{QR} = \vec{PQ} - \vec{QR}$$

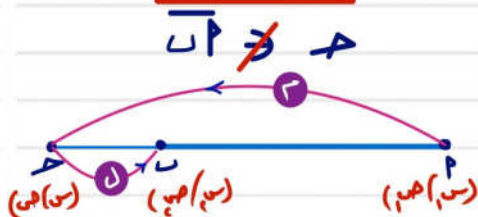
$$\vec{PQ} - \vec{QR} = \vec{PQ} - \vec{QR}$$

$$\vec{PQ} - \vec{QR} = \vec{PQ} - \vec{QR}$$

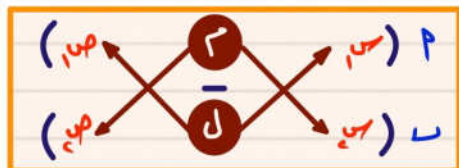
$$\vec{PQ} = \vec{PQ} - \vec{QR}$$

تقسيم قطعة مستقيمة

من الخارج

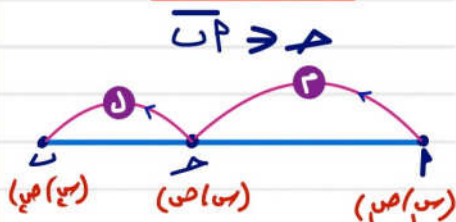


النقطة الأولى، x النقطة الثانية
نقطة التقسيم، $\frac{2}{3}$ نسبة التقسيم

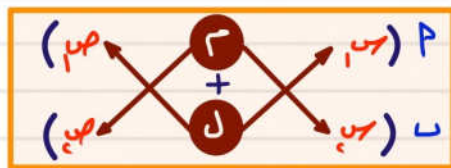


$$\left(\frac{2x - x}{2 - 1} \right) = x$$

من الداخل



النقطة الأولى، x النقطة الثانية
نقطة التقسيم، $\frac{2}{3}$ نسبة التقسيم



$$\left(\frac{2x + x}{2 + 1} \right) = x$$

ملاحظات

$$x - x = 0$$

$$x - x = 0$$

$$\frac{x+x}{2} = x$$

١ إحدائهما منصف AB

$$\frac{x+x+x}{3} = x$$

٢ إحدائهما ٢ نقطة ثلاثى متوسطة AB

$$x - x + x = x$$

٣ إحدائهما الرأس x في متوازي الاضلاع AB

المطابقات المثلثية

المثلثات

مطابقة الدوال المثلثية ومقلوبتها

١

$\frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta$	$\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$	$\frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta$
$\csc \theta \times \sin \theta = 1$	$\sec \theta \times \cos \theta = 1$	$\cot \theta \times \tan \theta = 1$

مطابقة الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين

٢

$\sin \theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$	$\cos \theta = \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$
$\tan \theta = \cot(\theta - \frac{\pi}{2})$	$\cot \theta = \tan(\theta - \frac{\pi}{2})$
$\sec \theta = \csc(\theta - \frac{\pi}{2})$	$\csc \theta = \sec(\theta - \frac{\pi}{2})$

مطابقة الدوال المثلثية للزاويتين θ و $\theta - \frac{\pi}{2}$

٣

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos \theta$	$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin \theta$	$\tan(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cot \theta$
$\cot(\theta - \frac{\pi}{2}) = \tan \theta$	$\sec(\theta - \frac{\pi}{2}) = \csc \theta$	$\csc(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\sec \theta$

مطابقة الدالتين $\sin \theta$ و $\cos \theta$

٤

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$	$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$
---	---

مطابقة مربعات الدوال المثلثية وزمعيهم $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

٥

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$
$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$
$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$

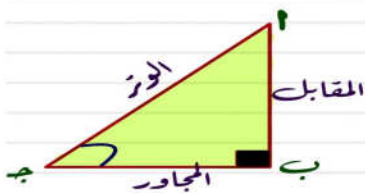
الحل العام للمعادلة المثلثية

الحل العام	المعادلة
$\theta = n\pi + \alpha$	$\sin \theta = \sin \alpha$
$\theta = n\pi + \alpha$ و $\theta = n\pi + \pi - \alpha$	$\sin \theta = \sin \alpha$
$\theta = n\pi + \alpha$ و $\theta = n\pi + \pi - \alpha$	$\cos \theta = \cos \alpha$

حل المثلث القائم الزاوية زوايا الارتفاع والانخفاض

يقصد بحل المثلث: إيجاد العناصر المجهولة.

تذكر أن



$$\begin{aligned} ١ \quad \text{المقابل} &= \frac{\text{حـ ا ج}}{\text{الوتر}} \\ ٢ \quad \text{المجاور} &= \frac{\text{حـ ب ا ج}}{\text{الوتر}} \\ ٣ \quad \text{المقابل} &= \frac{\text{ظـ ا ج}}{\text{المجاور}} \end{aligned}$$

عند معلومية طول ضلع وقياس زاوية

الحالة الأولى

$$\text{نسبة مثلثية لزاوية معلومة} = \frac{\text{المجهول}}{\text{المعلوم}}$$

نستخدم

عند معلومية طول ضلعين فيه

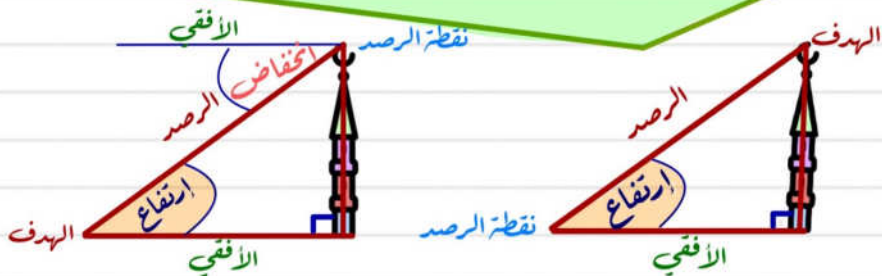
الحالة الثانية

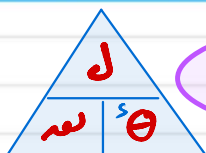
$$\text{نسبة مثلثية لزاوية مجهولة} = \frac{\text{المعلوم}}{\text{المعلوم}}$$

نستخدم

زوايا الارتفاع والانخفاض

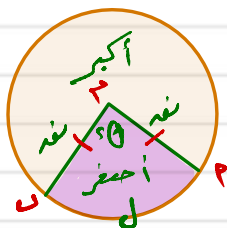
تعريف: زاوية الارتفاع والانخفاض هي الزاوية المحصورة بين الشعاع الأفقي وشعاع الرصد عند نقطة الرصد





قوانين المساحات

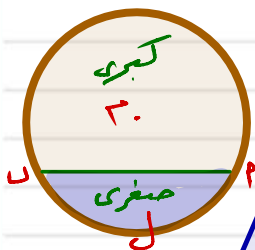
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{\theta}{180}$$



القطاع الدائري

١

$$\begin{aligned} \text{مساحة} &= \frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{ث} \\ &= \frac{1}{2} \times \text{ث} \times \text{ل} \\ \text{محيط} &= \text{ل} + \text{ث} + \text{ل} \end{aligned}$$



القطعة الدائرية

٢

$$\begin{aligned} \text{مساحتها} &= \frac{1}{2} \times \text{ل} \times (\theta - \theta) \\ \text{محيطها} &= \text{طول قوسها} + \text{طول مركزها} \end{aligned}$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب أي ضلعين} \times \text{حاصل زاوية بينهم}$

٣

مساحة الشكل الرباعي = $\frac{1}{2} \times \text{ضرب قطر مني} \times \text{حاصل زاوية بينهم}$

٤

مساحة الشكل المنتظم = $\frac{\text{عدد أضلاعه} \times \text{طول ضلعه}}{2} \times \text{ط} (\frac{180}{\text{ن}})$

٥

ملاحظات

ملاحظات